5- Geometrik Dağılım :

Tesadüfi değişkenin, ilk başarıyı elde etmek için gerekli deneme sayısının gösterdiği dağılımdır. Başarı olasılığı p' nin sabit olduğu, bağımsız Bernoulli denemeleri göz önüne alınsın. Denemeler ilk başarı elde edilinceye kadar sürdürülecektir. Sadece bir parametreli, yani p değerinin bilinmesi yeterlidir. Gerekli deneme sayısı X t.d. ile gösterilmek üzere olasılık fonksiyonu,

$$p(X=x) = f(x) = \begin{cases} p \cdot q^{x-1} & , x = 1, 2, \dots \\ 0 & , \text{d.h.} \end{cases}$$

şeklinde verilir.

Dağılımın beklenen değer ve varyansı;

$$E(x) = \sum_{R_x} x \cdot p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot p \cdot q^{x-1} = p \cdot \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot q^{x-1}$$

$0 \leq q < 1$ old.

$$= p \cdot \frac{\partial}{\partial q}\left(\sum_{x=1}^{\infty} q^x\right) = p \cdot \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{1-q}\right) = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2}$$

$$= \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$E(x^2) = \sum_{R_x} x^2 \cdot p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot p \cdot q^{x-1} = p \cdot \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot x \cdot q^{x-1}$$

$$= p \cdot \frac{\partial}{\partial q} \sum_{x=1}^{\infty} (x \cdot q^x) = p \cdot \frac{\partial}{\partial q} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot q \cdot q^{x-1}$$

$$= p \cdot \frac{\partial}{\partial q}\, q \cdot \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q}(q^x)$$

$$= p \cdot \frac{\partial}{\partial q}\, q \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = p \cdot \left[\frac{1 \cdot (\overbrace{1-q}^{=p})^2 + 2 \cdot (\overbrace{1-q}^{p}) \cdot q}{(1-q)^4}\right]$$

$$= p \cdot \left[\frac{p^2 + 2pq}{p^4}\right] = \frac{\cancel{p^2}(p + 2q)}{p^4} = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{q}{p^2}$$

bulunur.

Karakteristik Fonksiyonu;

$$|e^{it}| = |\cos t + i \sin t| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$$

$$\Phi_x(t) = E(e^{itx}) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{itx} \cdot p \cdot q^{x-1}$$

$$|e^{it} \cdot q| < 1$$
$$q \cdot |e^{it}|$$

$$= \frac{p}{q} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} \underbrace{(e^{it} \cdot q)^x}_{a}$$

$$, \sum_{x=1}^{\infty} a^x = a + a^2 + \dots = a(1+a+\dots = a \cdot \frac{1}{1-a}$$

$$= \frac{p}{\cancel{q}} \cdot \frac{e^{it} \cdot \cancel{q}}{1 - e^{it} q}$$

$$= \frac{p \cdot e^{it}}{1 - q \cdot e^{it}} //$$

Örnek : Bir kavşakta bir aracın sağa dönüş olasılığı $\frac{2}{7}$ dir. Kavşağa gelen 29. aracın sağa dönüş olasılığı nedir? Beklenilen sayısı nedir. Varyans ve $\Phi_x(t) = ?$

Çözüm : $p = \frac{2}{7}$

X: Sağa dönüş yapan ilk araca kadar gelen araç sayısı.

$$p(x=29) = p \cdot q^{x-1} = \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{28} = 0{,}000023,,$$

$$E(x) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{2}{7}} = \frac{7}{2}$$

$$V(x) = \frac{q}{p^2} = \frac{5}{7} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{4} = 8{,}75 ,,$$

$$\Phi_x(t) = \frac{p \cdot e^{it}}{1 - q \cdot e^{it}} = \frac{\frac{2}{7} \cdot e^{it}}{1 - \frac{5}{7} \cdot e^{it}} = \frac{2 \cdot e^{it}}{7 - 5 \cdot e^{it}} ,,$$

Örnek : Bir futbolcunun attığı her penaltıyı gole çevirme olasılığı 0.8 dir. Çalışma 7 sırasında ilk golü atıncaya kadar penaltıya devam edilecektir. Buna göre

a.) ilk golü atıncaya kadar, gerekli atış sayısının olasılık fonksiyonu nedir.

b.) ilk golün 3. atışta olma olasılığı?

c.) ilk gol için 5 den az atış gerekmesi olasılığı nedir.

d.) ilk golü atması için gereken ortalama atış sayısı nedir.

Çözüm ; X: ilk golü atıncaya kadar yapılan atış sayısı olsun.

a.) $p(X=x) = (0.8).(0,2)^{x-1}$, $x = 1, 2, \ldots$

b.) $p(x=3) = f(3) = (0.8).(0,2)^2 = 0.032$ //

c.) $p(x < 5) = \sum_{x=1}^{4} (0.8).(0,2)^{x-1} \cong 0.998$ //

d.) $E(x) = \frac{1}{0.8} = 1,2$ beklenen atış sayısı, ilk gol için.